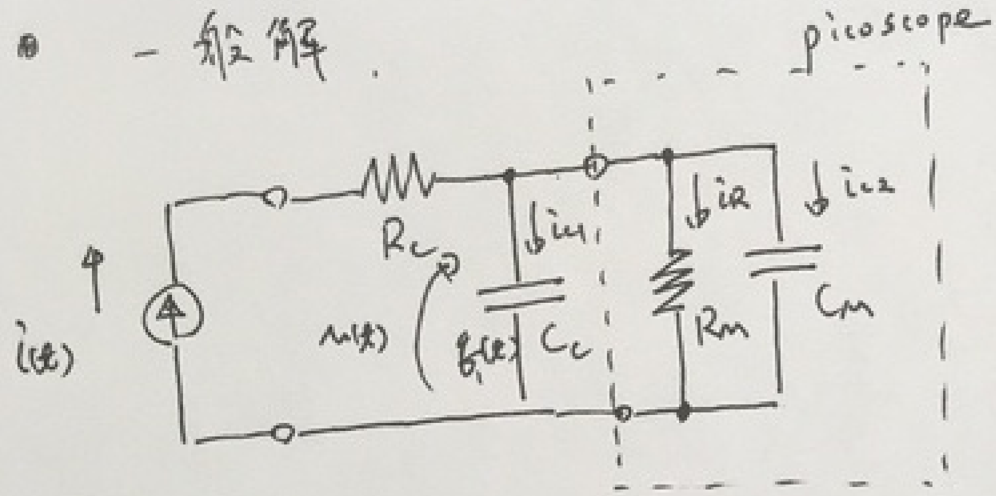
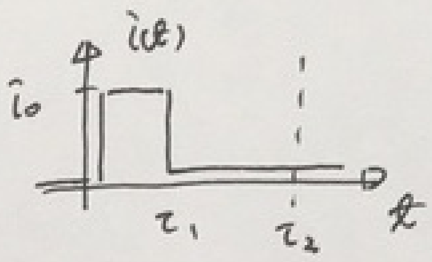
・一般解.



$i(t)$ のモデル

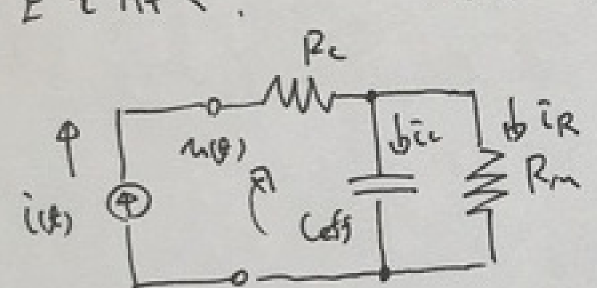
$$i(t) = \begin{cases} i_0 & (0 \leq t < \tau_1) \\ 0 & (\tau_1 \leq t < \tau_2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} v(t) = \dfrac{1}{C_c}\displaystyle\int i_{c1}(t)\,dt = \underbrace{\cancel{\dfrac{\cdots}{R_m}}}_{R_m i_R} = \dfrac{1}{C_m}\displaystyle\int i_{c2}(t)\,dt. \\ i(t) = i_{c1} + i_R + i_{c2} \\ q_1(t) = \displaystyle\int i_{c1}(t)\,dt \end{cases}$$

を解く。　まず、回路をまとめて.

$$\begin{cases} C_{eff} = C_c \,/\!/\, C_m \text{ を導入.} \\ i_c = i_{c1} + i_{c2} \\ q(t) = \displaystyle\int i_c(t) \end{cases}$$



これより.

$$\begin{cases} i(t) = i_c + i_R. \\ i_c(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} \\ v(t) = \dfrac{1}{C_{eff}} q(t) \end{cases} \text{ より.}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} + \cancel{\frac{\cdots}{R_m}}\ \cancel{R_m v(t)}\ \frac{v(t)}{R_m}$$

$$= \frac{dq}{dt} + \frac{1}{R_m C_{eff}} q(t)$$

$$= \begin{cases} i_0 & (0 \leq t < \tau_1) \cdots ① \\ 0 & (\tau_1 \leq t < \tau_2) \cdots ② \end{cases}$$ が解くべき式.

---

①について.

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{R_m C_{eff}} q(t) = i_0$$

斉次解は. $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{R_m C_{eff}} q = 0$ より.

$$\frac{1}{q} dq = -\frac{1}{R_m C_{eff}} dt$$

$$\ln|q| = -\frac{1}{R_m C_{eff}} t + C_1(t)$$

$$q = C_{2(t)} e^{-\frac{1}{R_m C_{eff}} t}$$

これを元の式に代入して.（$R_m \Rightarrow R$, $C_{eff} \Rightarrow C$ とおく）

$$C_2' \cancel{q(t)} e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{1}{RC} C_2 \cancel{q} e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{1}{RC} C_2 e^{-\frac{1}{RC}t} = i_0$$

$$\therefore C_2' = i_0 e^{\frac{1}{RC}t}$$

$$C_2 = i_0 RC e^{\frac{1}{RC}t} + C_3$$

$$\therefore q(t) = i_0 RC + C_3 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$t = 0$ で $q(0) = 0$. より.

$$q(0) = i_0 RC + C_3 = 0. \quad \therefore C_3 = -i_0 RC$$

$$\therefore q(t) = i_0 RC \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

$$v(t) = \frac{1}{C} q(t) = R i_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

$$i(t) = \cancel{\int i_c(t)\,dt} = \frac{dq}{dt} = i_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

一般解、続き。

② $$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$$

同様に、斉次解は、

$$q(t) = C_4(t)\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

であり、初期条件 ($t = \tau_1$)を使用すれば、

$$q(t=\tau_1) = i_0 RC \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}\tau_1}\right)$$

$$q(t=\tau_1) = C_4(t)\, e^{-\frac{1}{RC}\tau_1} = i_0 RC \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}\tau_1}\right)$$

$$C_4 = i_0 RC\, e^{\frac{1}{RC}\tau_1} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}\tau_1}\right)$$

これより、

$$q(t) = i_0 RC \left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right) e^{-\frac{(t-\tau_1)}{RC}}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} q(t) = R i_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right) e^{-\frac{t-\tau_1}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -i_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right) e^{-\frac{t-\tau_1}{RC}}$$

よって、まとめると、一般解は、

$0 \leq t < \tau_1$

$$\begin{cases} q(t) = i_0 RC \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \\ v(t) = R i_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \\ i(t) = i_0\, e^{-\frac{1}{RC}t} \end{cases}$$

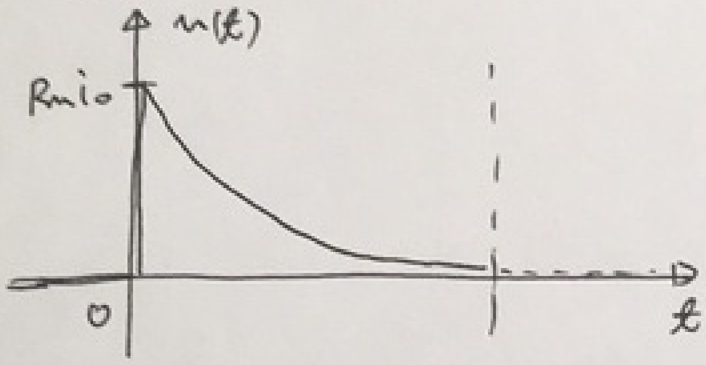
$\tau_1 \leq t < \tau_2$

$$\begin{cases} q(t) = i_0 RC \left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right) e^{-\frac{t-\tau_1}{RC}} \\ v(t) = R i_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right) e^{-\frac{t-\tau_1}{RC}} \\ i(t) = -i_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right) e^{-\frac{t-\tau_1}{RC}} \end{cases}$$

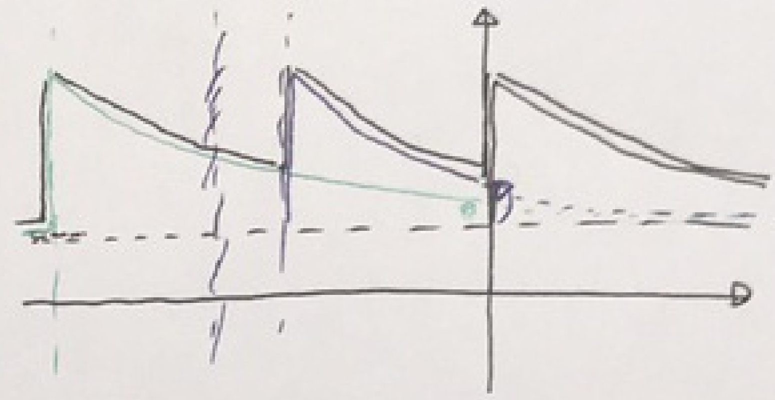
となる。

◎ オフセットについて。

単発信号。



繰返し →



単発信号が、$0 \mapsto -\infty$ までの過去の時間分、減衰がしきらず残っていると~~考えると~~考えると。

$(\tau_1 \le t < \tau_2)$

$$v^{pulse}(t) = Ri_0\left(1-e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right)e^{-\frac{t-\tau_1}{RC}}$$ 〜 単発信号の理論値。より。

$t = \tau_1$ (ピーク値)で考えて、

$t-\tau_1 = t'$ ，　1つ前のビームパルスの信号は、$t'' = t' + 1\times\Delta T$，として $v^{pulse}(t'')$

(ΔTは繰返し周期)

2つ前の　:　$t'' = t' + 2\times\Delta T$　$v^{pulse}(t'')$

⋮

nつ前の　:　$v^{(n)}_{pulse}(t') = Ri_0\left(1-e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right)e^{-\frac{n\Delta T}{RC}}$

基準時刻時点で、$n=1\sim\infty$ の信号がのっているため、

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v^{(n)}_{pulse} = \sum_{n=1}^{\infty} Ri_0\left(1-e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right)e^{-\frac{n\Delta T}{RC}}\cdot e^{-\frac{t-\tau_1}{RC}}$$
$$= Ri_0\left(1-e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right)e^{-\frac{t-\tau_1}{RC}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\Delta T}{RC}}$$

これは、単発信号に時間遅れのファクター $r = e^{-\frac{\Delta T}{RC}}$ が n回かかっているのと等しい。（等比級数）

$= \sum_{n=1}^{\infty} r\cdot r^{n-1} = r\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ と初項1，公比rの等比級数。

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{\Delta T}{RC}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r}.$$

$r = e^{-\frac{\Delta T}{RC}} < 1$ のため、収束し、$S_\infty = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-e^{-\frac{\Delta T}{RC}}} = \frac{1}{1-e^{-\frac{3.0\times10^{-3}}{2.5\times10^{-3}}}} = \frac{1}{1-e^{-1.2}}$

$$V_{offset} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\Delta T}{RC}} \times Ri_0\left(1-e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right)\times e^{-\frac{\tau_1-\tau_1}{RC}}$$ （$e^{-\frac{\tau_1-\tau_1}{RC}} \fallingdotseq 1$）

$$= \underbrace{1\times10^{6}\times 0.77\times10^{-3}\times\frac{3\times10^{-6}}{2.5\times10^{-3}}}_{\propto V_{p\text{-}p}}\times S_\infty$$

$= 0.92\,(V)$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} e^{-\frac{n\Delta T}{RC}}$$

$$a_n = e^{-\frac{\Delta T}{RC}} \cdot \left[e^{-\frac{\Delta T}{RC}} \right]^{(n-1)} \qquad \begin{cases} a_1 = e^{-\frac{\Delta T}{RC}} \\ r = e^{-\frac{\Delta T}{RC}} \end{cases} \text{ の等比級数.}$$

$$= a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + \quad + a_N$$

$$= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{N-1}$$

$$r S_N = a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{N-1} + a_1 r^N$$

$$(1-r) S_N = a_1 - a_1 r^N$$

$$\therefore S_N = \frac{a_1 (1-r^N)}{1-r} \xrightarrow[N \to \infty]{} S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{e^{-\frac{\Delta T}{RC}}}{1 - e^{-\frac{\Delta T}{RC}}} \qquad \begin{cases} RC = 2.5\,\mathrm{ms} \\ \Delta T = 3.3\,\mathrm{ms} \end{cases} \text{ より.}$$

$$S_\infty = \frac{e^{-\frac{3.3}{2.5}}}{1 - e^{-\frac{3.3}{2.5}}} \rightarrow S_\infty = 0.3645$$

$$@\, t = \tau_1$$

$$V_{offset} = R i_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}}\right) \times e^{-\frac{\tau_1 - \tau_1}{RC}} \times S_\infty$$

$$= V_{p\text{-}p} \times S_\infty$$

$$= 0.92\,(\mathrm{V}) \times 0.3645$$

$$= 0.335\,(\mathrm{V})$$

・パルス列の一般表記．

$$v_{pulse}(t) = \begin{cases} R i_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right] & (0 \le t < \tau_1) \\ R i_0 \left[1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}} \right] e^{-\frac{t-\tau_1}{RC}} & (\tau_1 \le t < \tau_2) \to (\tau_1 \le t) \end{cases}$$

$t' = \cancel{t}0$ で始動するパルスの以前に、$n = 1, 2, \cdots, n$ のパルスが入っていた。

これは、$t' = -1 \times \Delta T, -2 \times \Delta T, -3 \times \Delta T, \cdots\cdots, -n \times \Delta T$ の過去の時間に

発生したパルスであり、$t' = -n\Delta T \; (= t_0^{(n)})$ を中心に、$v_{pulse}(t - t_0^{(n)}) = \begin{cases} [\cdot] \\ [\cdot] \end{cases}$ を作るた

$$v_{pulse}\left(t - t_0^{(n)}\right) \;\; \cancel{(t+n\Delta T)} = \begin{cases} R i_0 \left[1 - e^{-\frac{t - t_0^{(n)}}{RC}} \right] \\ R i_0 \left[1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}} \right] e^{-\frac{(t - t_0^{(n)}) - \tau_1}{RC}} \end{cases}$$

$$v_{pulse}(t + n\Delta T) = \begin{cases} R i_0 \left[1 - e^{-\frac{t + n\Delta T}{RC}} \right] & (t - t_0^{(n)} < \tau_1) \\ R i_0 \left[1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}} \right] e^{-\frac{t + n\Delta T - \tau_1}{RC}} & (t - t_0^{(n)} \ge \tau_1) \end{cases}$$

全パルス共、$t - t_0^{(n)} \ge \tau_1$ のため、

$$v_{pulse}(t + n\Delta T) = R i_0 \left[1 - e^{-\frac{\tau_1}{RC}} \right] e^{-\frac{t - \tau_1}{RC}} \cdot e^{-\frac{n\Delta T}{RC}}$$

$$= v_{pulse}(t) \cdot e^{-\frac{n\Delta T}{RC}}$$

$n = 1, 2, \cdots\cdots, \infty$ まで、足し合わせて、

$$v(t) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} v_{pulse}(t)\, e^{-\frac{n\Delta T}{RC}} + v_{pulse}(t)$$

$$= v_{pulse}(t) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\Delta T}{RC}} + v_{pulse}(t)$$

$$= v_{pulse}(t) \left(1 + S_\infty \right)$$